$-BCD$ 的高 AO，因建系容易，自然考虑建立坐标系，由二面角的大小求解. 或者直接用三垂线法作出二面角 $E-BC-D$ 的平面角，如图 3，即作 $EF\perp BD$ 于 F，$EM\perp BC$ 于 M，连 FM，去证 $\angle EMF$ 为二面角 $E-BC-D$ 的平面角，算得 $AO=1$，$V=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AO=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times1=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

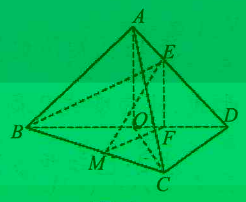

图 3

三、解法思路要自然

教师的作用是启思导学，“授人以渔”，进行激励、唤醒、引领. 学习数学离不开解题，解题的目的是巩固和加深对数学知识的理解，提高思维能力. 在解决问题过程中，要引导学生多角度、多方位、多层次的思考，寻找解决的线索或路径，并注意整理思路，使“条理清楚，逻辑严密，步步有据，思路清晰，规范简洁”.

教学是师生的共同活动，“教学做合一”，教学生学，在做中教，在做中学，在做中感悟. “做”是核心，在做中融会贯通，灵活运用. 解题思路要自然而然地展开，把复杂的东西简单化，难理解的东西通俗化，弄懂“为什么这样想”，找到更适合学生的自然解法，从而实现模仿到创新.

例 3　(2016 全国 Ⅰ 卷理) 已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点.

(1) 求 a 的取值范围；(2) 设 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两个零点，证明：$x_1+x_2<2$.

在参考答案中，对第(1)问，当 $a>0$ 时，为什么想到要取 b 满足 $b<0$ 且 $b<\ln\frac{a}{2}$，很诡异，不自然，难懂. 下面解法自然，易理解. 第(2)问，用逆向思考，利用函数的单调性，等价转化为函数值间的不等关系，构造函数，可轻松获解.

(1) **解法 1**：(对参数分类讨论) $f'(x)=(x-1)e^x+2a(x-1)=(x-1)(e^x+2a)$.

(i) 设 $a=0$，则 $f(x)=(x-2)e^x$，$f(x)$ 只有一个零点 $x=2$，不符合题意.

(ii) 设 $a>0$，则当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增. 又 $f(1)=-e<0$，$f(2)=a>0$，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，此时 $f(x)$ 存在两个零点，符合题意.

(iii) 设 $a<0$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=\ln(-2a)$. 若 $a\geqslant-\frac{e}{2}$，则 $\ln(-2a)\leqslant1$，故当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，因此 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 又当 $x\leqslant1$ 时，$f(x)<0$，所以 $f(x)$ 不存在两个零点. 若 $a<-\frac{e}{2}$，则 $\ln(-2a)>1$，故当 $x\in(1,\ln(-2a))$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\ln(-2a),+\infty)$ 时，$f'(x)>0$. 因此，$f(x)$ 在 $(1,\ln(-2a))$ 单调递减，在 $(\ln(-2a),+\infty)$ 单调递增. 又当 $x\leqslant1$ 时，$f(x)<0$，所以 $f(x)$ 不存在两个零点. 综上，a 的取值范围为 $(0,+\infty)$.

解法 2：(分离参数) 当 $x=1$ 时，$f(1)=-e\neq0$ 不是 $f(x)$ 零点，当 $x\neq1$ 时，$f(x)=0$ 等价于 $a=\frac{(2-x)e^x}{(x-1)^2}=g(x)$，则 $g'(x)=-e^x\cdot\frac{x^2-4x+5}{(x-1)^3}$. ∵ 当 $x<1$ 时 $g'(x)>0$，当 $x>1$ 时 $g'(x)<0$，∴ $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，又当 $x<2$ 时，$g(x)>0$，当 $x>2$ 时，$g(x)<0$，而 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to0$，结合图象 4 可知要使 $f(x)$ 有两个零点，即方程 $a=g(x)$ 有两个实根，只需 $a>0$，∴ a 的取值范围为 $(0,+\infty)$.

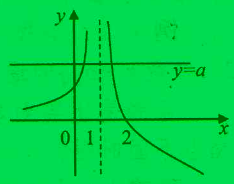

图 4

(2) **证法 1**：由解法 1 知 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，由(1)结果不妨设 $x_1<1<x_2$，要证明 $x_1+x_2<2\Leftrightarrow x_1<2-x_2<1\Leftrightarrow f(x_1)>f(2-x_2)$，∵ $f(x_1)=f(x_2)$，即证 $f(x_2)>f(2-x_2)$. 设 $h(x)=f(x)-f(2-x)$，$x>1$，则问题等价于证 $h(x)>0$. ∵ $h(x)=(x-2)e^x+xe^{2-x}$，∴ $h'(x)=(x-1)(e^x-e^{2-x})$. ∴ 当 $x>1$ 时，$e^x-e^{2-x}>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，$h(x)>h(1)=0$，从而原问题得证.

证法 2：由解法 2 知 $f(x)$ 零点满足 $x_1<1<x_2$，则要证明 $x_1+x_2<2\Leftrightarrow1<x_2<2-x_1$，∵ $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，∴ 只需证 $g(x_2)>g(2-x_1)$，又 $g(x_1)=g(x_2)$，从而只需证 $g(x_1)>g(2-x_1)$，$x_1<1$，即证 $\frac{2-x_1}{(x_1-1)^2}e^{x_1}>\frac{x_1}{(1-x_1)^2}e^{2-x_1}$，构造函数 $\varphi(x)=e^x(2-x)-xe^{2-x}$，$x<1$，问题转化为证明当 $x<1$ 时 $\varphi(x)>0$，∵ $\varphi'(x)=(e^x-e^{2-x})(1-x)$，∴ 当 $x<1$ 时，$e^x-e^{2-x}<0$，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递减，$\varphi(x)>\varphi(1)=0$，原问题得证.

四、问题变式要自然

教学不仅是传授学生知识，更重要的是培养学生的思维能力，进行思想引领. 在课堂教学中，应抓住思维训练这条主线，进行变式教学，通过问题驱动，激发学生去思考、创新. 变式就是改变问题的条件或结论，变换问题的形式或内容，一般化或特殊